

fenel

### Latihan 2

- Diketahui vektor  $\vec{a} = 8\hat{i} - 6\hat{j}$  dan vektor  $\vec{b} = 3\hat{i} - 9\hat{j}$ .  
Tentukan:
  - $\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$
  - $\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$
- Diketahui vektor  $\vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ , vektor  $\vec{q} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ , dan vektor  $\vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ .  
Tentukan:
  - $\vec{p} + \vec{q} + \frac{1}{2}\vec{r}$
  - $\vec{p} + 2\vec{q} - 3\vec{r}$
- Diketahui vektor  $\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j}$ , vektor  $\vec{b} = -4\hat{i} - \hat{j}$ , dan vektor  $\vec{c} = -\hat{i} + 2\hat{j}$ .  
Tentukan vektor-vektor berikut ini (nyatakan hasilnya dalam vektor-vektor basis  $\hat{i}$  dan  $\hat{j}$ ).
  - $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$
  - $\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$
- Diketahui vektor  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ , vektor  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ , dan vektor  $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ , berlaku

hubungan  $2\vec{a} - 3\vec{b} + x\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ , dengan  $x$  bilangan real. Tentukanlah nilai  $x$ .

- Koordinat titik  $P$  adalah  $(2, 3)$  dan koordinat titik  $Q$  adalah  $(12, -7)$ . Titik  $R(x, y)$  terletak pada ruas garis  $PQ$ , sehingga  $\vec{PR} = \frac{1}{5}\vec{PQ}$ .
  - Tentukan vektor yang diwakili oleh ruas garis berarah  $\vec{PQ}$ .
  - Tentukan vektor yang diwakili oleh ruas garis berarah  $\vec{PR}$ .
  - Tentukan koordinat titik  $R$ .

Diketahui titik-titik  $A_1(1, 1)$ ,  $A_2(2, 2)$ ,  $A_3(3, 3)$ , . . . , dan  $A_n(n, n)$ , dengan  $n \in$  bilangan asli. Ruas-ruas garis berarah  $\vec{OA}_1, \vec{OA}_2, \vec{OA}_3, \dots, \vec{OA}_n$  sebagai wakil bagi vektor-vektor  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n$ .  
Buktikan bahwa  $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \dots + \vec{a}_n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} n^2 + n \\ n^2 + n \end{pmatrix}$

### Latihan 3

- Diketahui vektor  $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ , vektor  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ , dan vektor  $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .
  - Hitunglah  $|\vec{a}|, |\vec{b}|$ , dan  $|\vec{c}|$ .
  - Tentukanlah vektor satuan dari vektor  $\vec{a}$ , vektor  $\vec{b}$ , dan vektor  $\vec{c}$ .
- Diketahui vektor  $\vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ , vektor  $\vec{q} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ , dan vektor  $\vec{r} = \vec{p} + \vec{q}$ .
  - Tentukan vektor  $\vec{r}$ .
  - Hitunglah panjang dari vektor  $\vec{p}$ , vektor  $\vec{q}$ , dan vektor  $\vec{r}$ .

- Tentukanlah vektor satuan dari vektor  $\vec{p}$ , vektor  $\vec{q}$ , dan vektor  $\vec{r}$ .

Vektor  $\hat{i}$  adalah vektor satuan yang searah dengan sumbu  $X$  positif dan vektor  $\hat{j}$  adalah vektor satuan yang searah dengan sumbu  $Y$  positif.

- Jelaskan mengapa vektor  $\hat{i} + \hat{j}$  bukan merupakan vektor satuan.
- Tentukan vektor satuan dari vektor  $\hat{i} + \hat{j}$ .

## Latihan 4

1. Diketahui vektor  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ , vektor  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ , dan vektor  $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ .
- a) Tentukanlah:
- (i)  $\vec{a} + \vec{b}$       (iv)  $\vec{c} + \vec{a}$   
 (ii)  $\vec{b} + \vec{a}$       (v)  $\vec{b} + \vec{c}$   
 (iii)  $\vec{a} + \vec{c}$       (vi)  $\vec{c} + \vec{b}$
- b) Periksalah, apakah
- (i)  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$   
 (ii)  $\vec{a} + \vec{c} = \vec{c} + \vec{a}$   
 (iii)  $\vec{b} + \vec{c} = \vec{c} + \vec{b}$
2. Diketahui vektor  $\vec{u} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$  dan vektor  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix}$ . Tentukanlah
- a)  $\vec{u} + \vec{v}$       c)  $\frac{1}{3}\vec{u} + \vec{v}$   
 b)  $\vec{u} - \vec{v}$       d)  $\frac{1}{3}\vec{u} - \vec{v}$
3. Diketahui vektor  $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ , vektor  $\vec{b} = 4\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ , dan vektor  $\vec{c} = -\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ .

Tentukanlah:

- a)  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$   
 b)  $\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$   
 c)  $\vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c}$   
 d)  $2\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c}$

4. Diketahui vektor  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ , vektor

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ , dan vektor  $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ , berlaku

hubungan  $2\vec{a} + 3\vec{b} + k\vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$

dengan  $k$  bilangan real.  
Tentukanlah nilai  $k$ .

~~5.~~ Misalkan diketahui vektor  $\vec{a} = (x + y)\hat{i} + (2x - y)\hat{j} + 3\hat{k}$  dan vektor  $\vec{b} = 5\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$ . Jika vektor  $\vec{a}$  = vektor  $\vec{b}$ , hitunglah nilai  $x$  dan nilai  $y$ .

6. Diketahui titik  $A$  dengan koordinat  $(1, -1, 3)$ , titik  $B$  dengan koordinat  $(2, -4, 5)$ , dan titik  $C$  dengan koordinat  $(5, -13, 11)$ .
- a) Tentukan ruas-ruas garis berarah berikut dalam bentuk vektor kolom.
- (i)  $\vec{OA}$       (iv)  $\vec{AB}$   
 (ii)  $\vec{OB}$       (v)  $\vec{BC}$   
 (iii)  $\vec{OC}$       (vi)  $\vec{AC}$
- b) Perhatikan bahwa titik  $A$ , titik  $B$ , dan titik  $C$  segaris atau kolinear.
- c) Tentukan nilai perbandingan  $AB : BC$ .

## Latihan 5

- Diketahui vektor  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ , vektor  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ , dan vektor  $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

  - Hitunglah  $|\vec{a}|$ ,  $|\vec{b}|$ , dan  $|\vec{c}|$ !
  - Tentukan vektor-vektor satuan dari vektor  $\vec{a}$ , vektor  $\vec{b}$ , dan vektor  $\vec{c}$ !
  - Tentukan  $\vec{r} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - 5\vec{c}$
- Diketahui vektor  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$  dan vektor  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ . Vektor  $\vec{w}$  adalah resultan dari vektor  $\vec{u}$  dengan vektor  $\vec{v}$ .

  - Tentukanlah vektor  $\vec{w}$ !
  - Hitunglah panjang vektor  $\vec{u}$ , panjang vektor  $\vec{v}$ , dan panjang vektor  $\vec{w}$ !
  - Tentukanlah vektor-vektor satuan dari vektor  $\vec{u}$ , vektor  $\vec{v}$ , dan vektor  $\vec{w}$ !
- Misalkan diketahui vektor  $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$  dan vektor  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ . Selain itu diketahui pula bahwa panjang vektor  $\vec{a}$  sama dengan panjang vektor  $\vec{b}$ .

  - Tentukanlah nilai-nilai  $x$  yang mungkin.
  - Tentukanlah vektor-vektor satuan dari vektor  $\vec{a}$  dan vektor  $\vec{b}$ .
- Hitunglah jarak antara dua titik dalam ruang untuk tiap pasangan titik-titik berikut ini.

  - $O(0, 0, 0)$  dan  $B(6, -2, 9)$
  - $A(6, -2, 0)$  dan  $B(2, 3, 7)$
  - $A(0, 3, 0)$  dan  $B(6, 0, 2)$
  - $A(-1, 3, 2)$  dan  $B(4, 0, -5)$
- $ABC$  adalah bangun geometri segitiga dengan titik-titik sudut  $A(-4, -1, -1)$ ,  $B(5, 5, 3)$ , dan  $C(-3, 1, 2)$ .

  - Hitunglah  $AB$ ,  $BC$ , dan  $AC$ !
  - Hitunglah keliling segitiga  $ABC$ !
- Tunjukkan bahwa titik-titik  $A(4, 2, 4)$ ,  $B(10, 2, -2)$ , dan  $C(2, 0, -4)$  adalah titik-titik sudut dari segitiga sama sisi!

  - Hitunglah luas segitiga  $ABC$  itu!
- Tunjukkan bahwa titik-titik  $P(4, 2, 6)$ ,  $Q(10, -2, 4)$ , dan  $R(-2, 0, 2)$  adalah titik-titik sudut dari segitiga sama kaki!

  - Hitunglah luas segitiga  $PQR$  itu!
- $KLM$  adalah bangun geometri segitiga dengan titik-titik sudut  $K(-11, 8, 4)$ ,  $L(-1, -7, -1)$ , dan  $M(9, -2, -4)$ .

  - Hitunglah  $KL^2$ ,  $LM^2$ , dan  $KM^2$ !
  - Dengan menggunakan dalil kosinus, hitunglah besar sudut  $KLM$ !
- Segitiga  $DEF$  dengan titik-titik sudut  $D(6, -10, 0)$ ,  $E(1, 0, -5)$ , dan  $F(6, 10, 10)$ .

  - Tunjukkan bahwa segitiga  $DEF$  merupakan segitiga siku-siku!
  - Hitunglah luas segitiga  $DEF$  itu!
- Tentukan persamaan bola jika pusat dan jari-jarinya diketahui sebagai berikut.

  - Pusat di titik  $(-2, 3, 5)$  dengan jari-jari  $r = 5$ .
  - Pusat di titik  $(3, 1, 4)$  dengan jari-jari  $r = 5$ .
- Diketahui persamaan sebuah bola ditentukan oleh:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 12x + 14y - 8z + 1 = 0$$

Tentukan pusat dan jari-jari bola itu.
- Sebuah bola pusatnya di titik  $(2, 4, 5)$ . Jika bola ini menyinggung bidang  $XOY$ , tentukan persamaan bola tersebut.

## Latihan 6

1. Titik-titik sudut dari segitiga  $ABC$  mempunyai koordinat  $A(2, -3, 4)$ ,  $B(-2, 6, 1)$ , dan  $C(2, 0, 2)$ . Vektor-vektor posisi dari titik  $A$ , titik  $B$ , dan titik  $C$  berturut-turut adalah  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ , dan  $\vec{c}$ .

- a) Nyatakan vektor  $\vec{a}$ , vektor  $\vec{b}$ , dan vektor  $\vec{c}$  dalam bentuk vektor kolom.
- b) Tentukan vektor-vektor yang diwakili oleh ruas-ruas garis berarah  $\vec{AB}$ ,  $\vec{BA}$ ,  $\vec{AC}$ ,  $\vec{CA}$ ,  $\vec{BC}$ , dan  $\vec{CB}$ .

2. Diketahui ruas garis  $AB$  dengan vektor posisi titik  $A$  adalah  $\vec{a}$  dan vektor posisi titik  $B$  adalah  $\vec{b}$ . Dengan menggunakan rumus perbandingan vektor, nyatakan vektor-vektor posisi dari titik-titik berikut ini dalam  $\vec{a}$  dan  $\vec{b}$ .

- a) Titik  $E$ , yang membagi ruas garis  $AB$  dengan perbandingan  $3 : 1$
- b) Titik  $F$ , yang membagi ruas garis  $AB$  dengan perbandingan  $5 : -2$

3. Vektor posisi titik  $P$  adalah  $\vec{p} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  dan

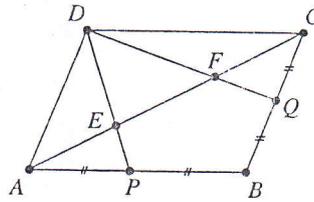
vektor posisi titik  $Q$  adalah  $\vec{q} = \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ 13 \end{pmatrix}$ . Titik

$R$  terletak pada ruas garis  $PQ$  dengan nilai perbandingan  $PR : RQ = 1 : 3$ .

Tentukan vektor posisi dari titik  $R$ .

Diketahui suatu segitiga  $ABC$  sebarang. Titik-titik  $P$ ,  $Q$ , dan  $R$  adalah titik-titik tengah pada sisi-sisi  $AB$ ,  $BC$ , dan  $CA$ . Jika  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ ,  $\vec{p}$ ,  $\vec{q}$ , dan  $\vec{r}$  masing-masing

adalah vektor-vektor posisi dari titik-titik  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $P$ ,  $Q$ , dan  $R$ , tunjukkan bahwa  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{p} + \vec{q} + \vec{r}$ .



Pada gambar diatas,  $ABCD$  adalah bangun geometri jajargenjang. Vektor-vektor posisi dari titik-titik  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , dan  $D$  berturut-turut adalah  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ , dan  $\vec{d}$ . Titik-titik  $P$  dan  $Q$  berturut-turut adalah titik-titik tengah  $AB$  dan  $BC$ . Titik-titik  $E$  dan  $F$  adalah titik-titik potong antara  $AC$  dengan  $DP$  dan  $AC$  dengan  $DQ$ .

- a) Buktikan bahwa  $\vec{d} - \vec{a} = \vec{c} - \vec{b}$ !
- b) Tentukan vektor posisi dari titik  $P$  dan titik  $Q$ !
- c) Buktikan bahwa  $\vec{PQ} = \frac{1}{2} \vec{AC}$ !
- d) Tentukan vektor-vektor yang diwakili oleh ruas-ruas garis berarah  $\vec{DP}$  dan  $\vec{DQ}$ !
- e) Tunjukkan bahwa  $\vec{AE} = \vec{EF} = \vec{FC} = \frac{1}{3} \vec{AC}$ !

$OABCDE$  adalah bangun geometri segi enam beraturan, vektor-vektor posisi dari titik-titik  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , dan  $E$  berturut-turut adalah  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ ,  $\vec{d}$ , dan  $\vec{e}$ .

Tunjukkan bahwa  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} = 3(\vec{d} - \vec{a})$ .

## Latihan 7

1. Diketahui titik  $A(2, -2)$  dan titik  $B(-4, 1)$ .
  - a) Tentukan koordinat titik  $P$ , jika  $AP : PB = 3 : 5!$
  - b) Tentukan koordinat titik  $Q$ , jika  $AQ : QB = -3 : 5!$

2. Diketahui ruas garis  $AB$  dengan koordinat titik  $A(3, -1)$  dan koordinat titik  $B(4, 7)$ . Titik  $K$  dan titik  $L$  terletak pada ruas garis  $AB$  sehingga  $AK = KL = LB$ . Tentukan koordinat titik  $K$  dan koordinat titik  $L$ !

3. Dalam segitiga  $ABC$  dengan titik-titik sudut  $A(3, -1)$ ,  $B(9, -2)$ , dan  $C(-5, -4)$ . Titik-titik  $P$ ,  $Q$ , dan  $R$  adalah titik tengah dari sisi-sisi  $BC$ ,  $AC$ , dan  $AB$ . Tentukan koordinat titik  $P$ , koordinat titik  $Q$ , dan koordinat titik  $R$ !

4. Diketahui segitiga  $ABC$  sebarang dengan titik-titik sudut  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ , dan  $C(x_3, y_3)$ . Titik  $T$  adalah titik berat segitiga  $ABC$ , yaitu merupakan titik potong dari garis-garis beratnya.

Tunjukkan bahwa koordinat titik  $T$  adalah  $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ .

5. Ruas garis  $AB$  dengan koordinat titik  $A(-2, -1)$  dan koordinat titik  $B(3, 3)$ . Titik  $C$  terletak pada perpanjangan ruas garis  $AB$ , sehingga  $\vec{BC} = 3\vec{AB}$ .

Tentukanlah koordinat dari titik  $C$ !

6. Diketahui segitiga  $ABC$  dengan titik-titik sudut  $A(3, 2)$ ,  $B(-1, 6)$ , dan  $C(7, 6)$ . Titik  $K$  membagi sisi  $AB$  dengan perbandingan  $1 : 3$ , titik  $L$  membagi  $AC$  dengan perbandingan  $3 : 1$ , dan titik  $M$  membagi  $BC$  dengan perbandingan  $9 : -1$ .

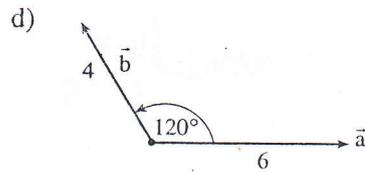
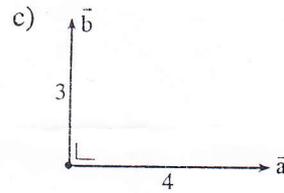
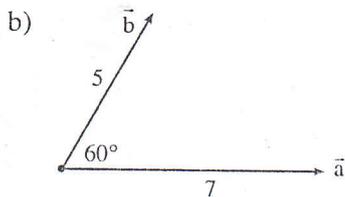
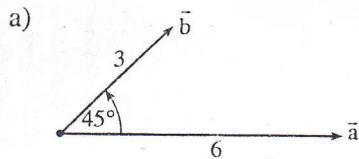
- a) Gambarlah sketsa grafik segitiga  $ABC$  dalam satu sistem koordinat Cartesius!
- b) Tentukan koordinat titik-titik  $K$ ,  $L$ , dan  $M$ !
- c) Tentukan vektor-vektor yang diwakili oleh ruas-ruas garis berarah  $\vec{KL}$ ,  $\vec{KM}$ , dan  $\vec{LM}$ !

## Latihan 8

1. Diketahui titik  $A(2, -4, 8)$  dan titik  $B(9, 3, 1)$ .  
Tentukan koordinat titik  $P$  yang membagi ruas garis  $AB$  dengan perbandingan  $5 : 2$ .
2. Titik  $R(9, 2, 4)$  membagi ruas garis  $PQ$  dengan perbandingan  $3 : 7$ . Jika koordinat titik  $P(6, 8, 1)$ , tentukan koordinat titik  $Q$ .
3. Dalam segi empat  $ABCD$  diketahui titik-titik sudut  $A(2, -1, 0)$ ,  $B(0, -1, -1)$ ,  $C(1, 1, -3)$ , dan  $D(3, 1, -2)$ .  
Titik-titik  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ , dan  $S$  berturut-turut adalah titik-titik tengah  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ , dan  $DA$ .
  - a) Perhatikan bahwa segi empat  $ABCD$  adalah bangun geometri persegi panjang!
  - b) Tentukan koordinat-koordinat titik  $P$ , titik  $Q$ , titik  $R$ , dan titik  $S$ !
  - c) Perhatikan bahwa  $PQRS$  adalah bangun geometri jajargenjang!
4. Diketahui titik  $A(-2, 0, 3)$ , titik  $B(3, 10, -7)$ , titik  $C(2, 4, 1)$ , dan titik  $D(-1, 10, -11)$ .
  - a) Tentukanlah koordinat titik  $P$ , jika titik  $P$  membagi  $CD$  dengan perbandingan  $1 : 2$ .
  - b) Perhatikan bahwa titik  $A$ , titik  $B$ , dan titik  $P$  segaris atau kolinear!
  - c) Hitunglah nilai perbandingan  $AB : BP$ .
5. Diketahui segitiga  $ABC$  dengan titik-titik sudut  $A(5, 1, 5)$ ,  $B(11, 8, 3)$ , dan  $C(-3, -2, 1)$ .
  - a) Perhatikan bahwa segitiga  $ABC$  adalah sebuah segitiga sama kaki!
  - b) Tentukan koordinat titik  $D$ , jika titik  $D$  adalah titik tengah sisi  $BC$ !
  - c) Perhatikan bahwa segitiga  $ADC$  adalah sebuah segitiga siku-siku di titik  $D$ !
  - d) Hitunglah luas segitiga  $ABC$  dan luas segitiga  $ADC$ !

## Latihan 9

1. Dengan menggunakan definisi perkalian skalar  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ , hitunglah  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  untuk setiap pasangan vektor  $\vec{a}$  dan vektor  $\vec{b}$  pada gambar berikut ini.



2.  $OPQR$  adalah bangun persegi panjang dengan  $OP = 6$  dan  $PQ = 8$ . Ruas garis berarah  $\vec{OP}$  mewakili vektor  $\vec{p}$  dan ruas garis berarah  $\vec{OQ}$  mewakili vektor  $\vec{q}$ . Hitunglah hasil kali skalar vektor  $\vec{p}$  dengan vektor  $\vec{q}$ !

## Latihan 10

1. Tentukan hasil kali skalar  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  untuk pasangan-pasangan vektor  $\vec{a}$  dan vektor  $\vec{b}$  berikut ini.

a)  $\vec{a} = 5\hat{i} + 2\hat{j}$  dan  $\vec{b} = 3\hat{i} - 7\hat{j}$

b)  $\vec{a} = 10\hat{i} - 3\hat{j}$  dan  $\vec{b} = 3\hat{i} + 10\hat{j}$

2. Diketahui titik  $A(3, 2)$ , titik  $B(-1, 3)$ , dan titik  $C(4, 1)$ . Ruas garis berarah  $\vec{AB}$  mewakili vektor  $\vec{u}$  dan ruas garis berarah  $\vec{AC}$  mewakili vektor  $\vec{v}$ .

- a) Hitunglah  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  dan  $\vec{v} \cdot \vec{u}$ !  
 b) Periksalah, apakah  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ ?

3. Diketahui vektor  $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ , vektor  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ , dan vektor  $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

- a) Hitunglah  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{c}$ , dan  $\vec{b} \cdot \vec{c}$ !  
 b) Hitunglah  $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})$  dan  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}$ !  
 c) Hitunglah  $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$  dan  $\vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ !

## Latihan 11

1. Pasangan-pasangan vektor  $\vec{a}$  dan vektor  $\vec{b}$  berikut ini saling tegak lurus atau ortogonal. Hitunglah nilai  $x$ .
  - a)  $\vec{a} = x\hat{i} + 3\hat{j}$  dan  $\vec{b} = -2\hat{i} + 4\hat{j}$
  - b)  $\vec{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j}$  dan  $\vec{b} = 4\hat{i} + \frac{1}{3}x\hat{j}$
  
2. Diketahui segitiga  $ABC$  dengan koordinat-koordinat titik  $A(1, 3)$ , titik  $B(2, 5)$ , dan titik  $C(-1, 4)$ .
  - a) Tentukan vektor-vektor yang diwakili oleh ruas-ruas garis berarah  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$ ,  $\vec{BA}$ ,  $\vec{BC}$ ,  $\vec{CA}$ , dan  $\vec{CB}$ .
  - b) Dengan menggunakan teorema Ortogonalitas, tunjukkan bahwa segitiga  $ABC$  siku-siku. Kemudian sebutkan titik sudut siku-sikunya.
  
3. Diketahui titik  $A(5, 2, -3)$ , titik  $B(6, 1, 4)$ , titik  $C(-3, -2, -1)$ , dan titik  $D(-1, -4, 13)$ .
  - a) Tentukan wakil dari ruas garis berarah  $\vec{AB}$  dan ruas garis berarah  $\vec{CD}$  (nyatakan hasilnya dalam bentuk vektor kolom!).
  - b) Ruas garis berarah  $\vec{AB}$  dapat dinyatakan sebagai  $\vec{AB} = k\vec{CD}$ , tentukanlah nilai  $k$ !
  - c) Dengan menggunakan tanda-tanda hasil kali skalar  $\vec{AB} \cdot \vec{CD}$ , perhatikan bahwa  $\vec{AB}$  sejajar  $\vec{CD}$ !
  
4. Diketahui vektor  $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ , vektor  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , dan vektor  $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .
  - a) Jika panjang vektor  $\vec{a}$  sama dengan 2 satuan dan vektor  $\vec{a}$  membentuk sudut  $60^\circ$  terhadap vektor  $\vec{b}$ , perhatikan bahwa nilai  $x = 1$ !
  - b) Jika vektor  $\vec{a}$  tegak lurus atau ortogonal terhadap vektor  $\vec{c}$ , perhatikan bahwa  $y = 0$ . Kemudian hitunglah nilai  $z$  yang mungkin!
  
5. Diketahui vektor  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  dan vektor  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ -8 \end{pmatrix}$ . Vektor  $\vec{a} = \vec{u} + k\vec{v}$  dan vektor  $\vec{a}$  tegak lurus pada vektor  $\vec{u}$ . Tentukanlah nilai  $k$  yang mungkin.
  - a) Diketahui empat buah titik terletak di ruang dengan koordinat masing-masing adalah  $A(2, -1, 0)$ ,  $B(0, -1, -1)$ ,  $C(1, 1, -3)$ , dan  $D(3, 1, -2)$ . Dengan menggunakan teorema Ortogonalitas, tunjukkan bahwa  $ABCD$  adalah bangun persegi panjang.

## Latihan 12

1. Vektor  $\vec{a}$  dan vektor  $\vec{b}$ , adalah vektor-vektor sebarang yang bukan vektor nol. Tunjukkan bahwa  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a} + \vec{b}|^2$ .

2. Diketahui vektor  $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ , vektor  $\vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ , dan vektor  $\vec{c} = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$ .

Tunjukkan bahwa.

- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c}$
- $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$
- $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{c}$

3. Diketahui vektor  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ , vektor  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ , dan vektor  $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ p \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Hitunglah nilai  $p$ , jika berlaku hubungan berikut:

- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b}$
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{a}$

4. Vektor  $\vec{a}$  dan vektor  $\vec{b}$  masing-masing adalah vektor satuan, sudut yang dibentuk oleh vektor  $\vec{a}$  dan vektor  $\vec{b}$  sama dengan  $60^\circ$ , dan vektor  $\vec{p}$  ditentukan oleh  $\vec{p} = 3\vec{a} - 4\vec{b}$ .

Hitunglah nilai dari hasil kali skalar berikut ini.

- $\vec{a} \cdot \vec{a}$
- $\vec{b} \cdot \vec{b}$
- $\vec{a} \cdot \vec{b}$
- $\vec{p} \cdot \vec{p}$

5.  $PQRS$  adalah bangun geometri jajargenjang. Ruas garis berarah  $\vec{PS}$  dan ruas garis berarah  $\vec{PQ}$  masing-masing mewakili vektor  $\vec{p}$  dan vektor  $\vec{q}$ .

- Tentukan vektor-vektor yang diwakili oleh ruas-ruas garis berarah  $\vec{PR}$  dan  $\vec{QS}$  (nyatakan hasilnya dalam  $\vec{p}$  dan  $\vec{q}$ ).
- Jika  $|\vec{p}| = |\vec{q}|$  tunjukkan bahwa  $\vec{PR}$  tegak lurus  $\vec{QS}$ .

6. a) Vektor  $\hat{i}$ , vektor  $\hat{j}$ , dan vektor  $\hat{k}$  adalah vektor-vektor satuan di ruang yang panjangnya satu satuan dan saling tegak lurus. Salin dan lengkapilah tabel hasil kali skalar berikut ini.

## Latihan 13

1. Jika  $\theta$  adalah besar sudut antara vektor  $\vec{a}$  dan vektor  $\vec{b}$ , hitunglah nilai  $\cos \theta$  bagi pasangan-pasangan vektor  $\vec{a}$  dan vektor  $\vec{b}$  berikut ini.

a)  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  dan  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$   
 b)  $\vec{a} = 2\hat{i} - 5\hat{j}$  dan  $\vec{b} = -2\hat{i} + 5\hat{j}$

2. Diketahui vektor  $\vec{a} = \hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$  dan vektor  $\vec{b} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ .

- a) Hitunglah  $|\vec{a}|$ ,  $|\vec{b}|$ , dan  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ .  
 b) Tentukan besar sudut antara vektor  $\vec{a}$  dengan vektor  $\vec{b}$ .

3. Sudut  $\alpha$ , sudut  $\beta$ , dan sudut  $\gamma$  masing-masing adalah sudut yang dibentuk oleh vektor  $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$  terhadap sumbu X, terhadap sumbu Y, dan terhadap sumbu Z.

- a) Dengan menggunakan hasil-hasil kali skalar  $\vec{a} \cdot \hat{i}$ ,  $\vec{a} \cdot \hat{j}$ , dan  $\vec{a} \cdot \hat{k}$ , tentukanlah  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ , dan  $\cos \gamma$ .  
 b) Kemudian perlihatkan bahwa  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ .

4. Diketahui segitiga  $ABC$  dengan titik-titik sudut  $A(1, -3, 2)$ ,  $B(2, -6, 7)$ , dan  $C(4, -5, 1)$ . Tentukan besar sudut-sudut dalam segitiga  $ABC$  tersebut.

5. Diketahui empat buah titik yaitu titik  $P(3, 3, 3)$ , titik  $Q(1, 2, -1)$ , titik  $R(4, 1, 1)$ , dan titik  $S(6, 2, 5)$ .

- a) Tunjukkan bahwa  $PQRS$  adalah bangun jajargenjang.  
 b) Tentukanlah besar sudut-sudut pada jajargenjang tersebut.

## Latihan 14

1. Misalkan vektor  $\vec{c}$  adalah proyeksi vektor ortogonal dari vektor  $\vec{a}$  pada arah vektor  $\vec{b}$  dan  $p$  menyatakan panjang vektor  $\vec{c}$ .

- a) Tunjukkan bahwa nilai  $p$  berada dalam batas-batas  $0 \leq p \leq |\vec{a}|$ .  
 b) Jika  $p = 0$ , sebutkan kedudukan vektor  $\vec{a}$  terhadap vektor  $\vec{b}$ .  
 c) Jika  $p = |\vec{a}|$ , sebutkan kedudukan vektor  $\vec{a}$  terhadap vektor  $\vec{b}$ .

2. Diketahui titik  $A(2, 3, -1)$ , titik  $B(-2, -4, 3)$ , dan vektor  $\vec{p} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ .

- a) Tentukan proyeksi skalar ortogonal vektor  $\vec{p}$  pada arah  $\vec{AB}$ .  
 b) Tentukan proyeksi vektor ortogonal vektor  $\vec{p}$  pada arah  $\vec{AB}$ .

3. Diketahui titik  $A(1, 2, 2)$ , titik  $B(0, 1, 0)$ , dan titik  $C(2, -1, -1)$ .

- a) Tentukan ruas garis berarah  $\vec{AB}$  dan ruas garis berarah  $\vec{AC}$  dalam bentuk vektor kolom.

- b) Tentukan proyeksi vektor ortogonal  $\vec{AB}$  pada arah  $\vec{AC}$  dan proyeksi vektor ortogonal dari  $\vec{AC}$  pada arah  $\vec{AB}$ .

5. Diketahui vektor  $\vec{a} = 3\hat{i} + 5\hat{j} - 2\hat{k}$ , vektor  $\vec{b} = -\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ , dan vektor  $\vec{c} = 2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$ .

- a) Tentukan proyeksi skalar ortogonal vektor  $\vec{b}$  pada arah vektor  $(\vec{a} - 2\vec{c})$ .

- b) Tentukan proyeksi vektor ortogonal dari vektor  $\vec{b}$  pada arah vektor  $(\vec{a} - 2\vec{c})$ .

6. Diberikan segitiga  $ABC$  dengan titik-titik sudut  $A(4, -3, 2)$ ,  $B(2, -2, 6)$ , dan  $C(3, 4, 5)$ .

- a) Tunjukkan bahwa proyeksi vektor ortogonal  $\vec{CA}$  pada arah  $\vec{BA}$  diwakili oleh vektor  $2\hat{i} - \hat{j} - 4\hat{k}$ .

- b) Tunjukkan bahwa proyeksi vektor ortogonal  $\vec{AC}$  pada arah  $\vec{BC}$  diwakili oleh vektor  $\hat{i} + 6\hat{j} - \hat{k}$ .